Analiza zespolona
Lista 4 (zadania dodatkowe)

Zad 1. Niech $M_n(\mathbb{R})$ oznacza zbiór macierzy n na n o wyrazach rzeczywistych. Niech

$$GL(n,\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det(A) \neq 0\} \qquad \text{“macierze odwracalne”}$$

$$SL(n,\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det(A) = 1\} \qquad \text{“macierze specjalne”}$$

$$O(n,\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A^T A = AA^T = I\} \qquad \text{“macierze ortogonalne”}$$

$$SO(n,\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A^T A = I \wedge \det(A) = 1\} \qquad \text{“macierze ortogonalne specjalne”}$$

$$CO(n,\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \exists_{\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}}\ A^T A = \lambda I\} \qquad \text{“macierze konferemne”}$$

$$CO^+(n,\mathbb{R}) = \{A \in CO(n,\mathbb{R}) : \det(A) > 0\} \qquad \text{“macierze konferemne zachowujące orientacje”}$$

a) Pokazać, że

$$GL(n,\mathbb{R}) \supsetneq CO(n,\mathbb{R}) \supsetneq O(n,\mathbb{R}) \supsetneq SO(n,\mathbb{R}) = SL(n,\mathbb{R}) \cap O(n,\mathbb{R});$$

b) Pokazać, że wraz z mnożeniem macierzowym zbiór $M_n(\mathbb{R})$ nie tworzy grupy, natomiast pozostałe zbiory $GL(n,\mathbb{R}), SL(n,\mathbb{R}), O(n,\mathbb{R}), SO(n,\mathbb{R}), CO(n,\mathbb{R}), CO^+(n,\mathbb{R})$ są grupami.

c) Wykazać, że

$$CO(2,\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix} :\ x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 > 0 \right\},$$

$$CO^+(2,\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R},\ x^2 + y^2 > 0 \right\},$$

$$SO(2,\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R},\ x^2 + y^2 = 1 \right\}.$$

d) Wykazać, że zbiór $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ wraz z mnożeniem zespolonym jest grupą izomorficzną z grupą $CO^+(2,\mathbb{R})$.

e) Wykazać, że okrąg jednostkowy $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ wraz z mnożeniem zespolonym tworzy grupę izomorficzną z $SO(2,\mathbb{R})$.